

Signaux et Systèmes

Chapitre 7

Analyse et synthèse des filtres analogiques

Décembre 2023

TABLE DES MATIERES

7.1 Filtres analogiques: généralités

7.2 Filtres à phase linéaire

7.3 Fonctions de transfert rationnelles

7.4 Placement des pôles et zéros

7.5 Synthèse de filtres particuliers

7.1 FILTRES ANALOGIQUES: GENERALITES

- Filtre analogique = système analogique linéaire invariant dans le temps (LIT)
- Classification des filtres analogiques
- Spécifications fréquentielles
- Diagramme de Bode
- Temps de propagation de groupe

Filtre analogique = système analogique LIT

- Descriptions mathématiques équivalentes:

- Réponse impulsionnelle

$$h(t) = S_a \{ \delta \} (t)$$

- Réponse indicielle

$$a(t) = S_a \{ u \} (t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

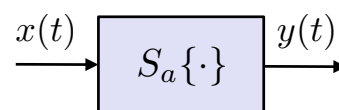
- Réponse fréquentielle

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Fonction de transfert (=notation plus concise)

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (\text{Transformation de Laplace})$$

Equivalent à Fourier si l'on pose $s = j\omega$

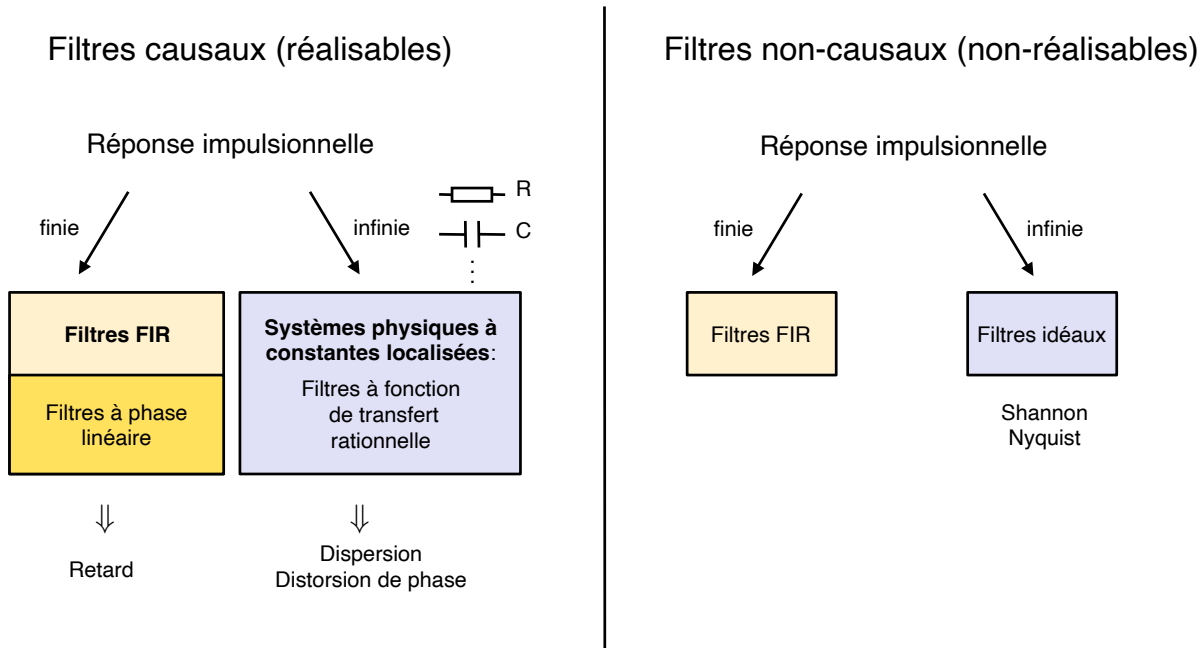


$$y(t) = (h * x)(t)$$



$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Classification des filtres analogiques



Remarque: la causalité est une contrainte physique liée à la flèche du **temps**. Des filtres non-causaux sont parfaitement réalisables dans d'autres contextes (e.g. systèmes optiques pour le traitement des images)

Spécifications fréquentielles

Les filtres idéaux n'étant pas réalisables, il faut faire des compromis:

- Fluctuations dans la bande passante ($1 \pm \delta_1$)
- Zone de transition (largeur Δ)
- Fluctuations dans la bande bloquante ($0 \pm \delta_2$)

La tolérance par rapport à une réponse idéale est exprimée à l'aide d'un gabarit

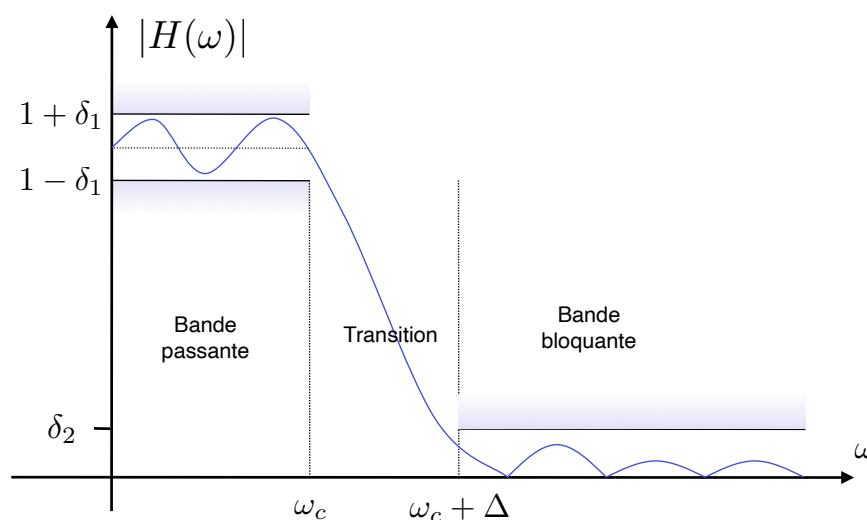


Diagramme de Bode

Réponse fréquentielle: $H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\Phi_H(\omega)}$

■ Diagramme de Bode

- Echelle fréquentielle logarithmique
- Amplitude en décibel: $20 \log_{10} |H(\omega)|$ [dB]
- Phase: $\Phi_H(\omega)$

■ Cas des fonctions de transfert rationnelles

$$H(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

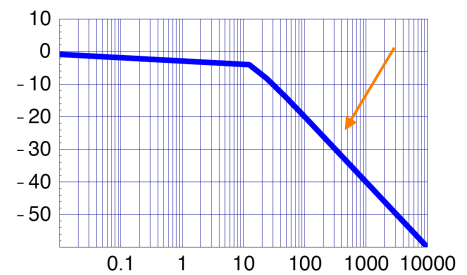
- Forme asymptotique lorsque $\omega \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = \frac{b_m}{(j\omega)^{n-m}}$$

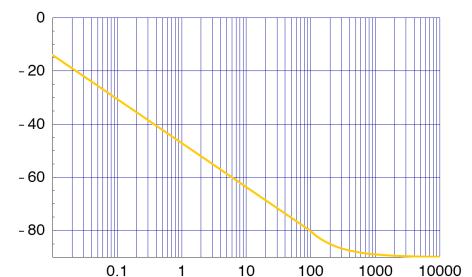
- Amplitude normalisée:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \{20 \log_{10} |H(\omega)|\} = -20(n-m) \log_{10} \omega + \text{const}$$

Amplitude: Pente: $20(n-m)$ dB par décade



Phase:



$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Phi_H(\omega) = -(n-m) \frac{\pi}{2}$$

Temps de propagation de groupe

■ Motivation

- L'effet d'un filtrage analogique se traduit généralement par l'introduction d'un retard
- L'effet de ce retard est complètement encodé dans la phase
- On observe une distorsion (dispersion) lorsque le temps de retard varie avec la fréquence

■ Cas d'un retard pur

$$h_0(t) = \delta(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_0(\omega) = e^{j\Phi_{H_0}(\omega)} \quad \text{avec} \quad \Phi_{H_0}(\omega) = -\omega t_0$$

■ Temps de propagation de groupe (Group delay)

$$\text{TPG}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \Phi_H(\omega)$$

■ Propriété: additivité lors de la mise en cascade de filtres

$$\begin{aligned} h(t) &= (h_1 * h_2)(t) \Rightarrow \Phi_H(\omega) = \Phi_{H_1}(\omega) + \Phi_{H_2}(\omega) \\ &\Rightarrow \text{TPG}(\omega) = \text{TPG}_1(\omega) + \text{TPG}_2(\omega) \end{aligned}$$

TPG : exemples de calcul

■ Cas du retard pur

$$H_0(\omega) = e^{-j\omega t_0} \Rightarrow \text{TPG}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}(-\omega t_0) = t_0$$

■ Systèmes différentiels

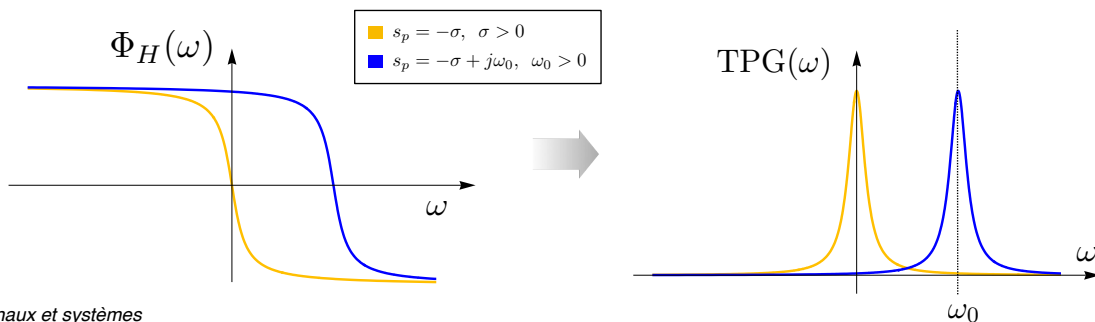
Formule alternative:
$$\text{TPG}(\omega) = -\text{Im} \left(\frac{d}{d\omega} \log H(\omega) \right) = -\text{Im} \left(\frac{\frac{dH(\omega)}{d\omega}}{H(\omega)} \right)$$

Rappel:

- $z = a + jb = \rho \cdot e^{j\theta}$
- $\log(z) = \log \rho + j\theta$
- $\text{Im}(j \cdot z) = \text{Re}(z) = a$

■ Exemple: système du 1er ordre

$$H(\omega) = \frac{\sigma}{j\omega + \underbrace{(\sigma - j\omega_0)}_{-s_p}} \Rightarrow \text{TPG}(\omega) = -\text{Im} \left(\frac{\frac{-j\sigma}{(j\omega - s_p)^2}}{\frac{\sigma}{j\omega - s_p}} \right) = \text{Re} \left(\frac{1}{j(\omega - \omega_0) + \sigma} \right)$$



Unser / Signaux et systèmes

7-9

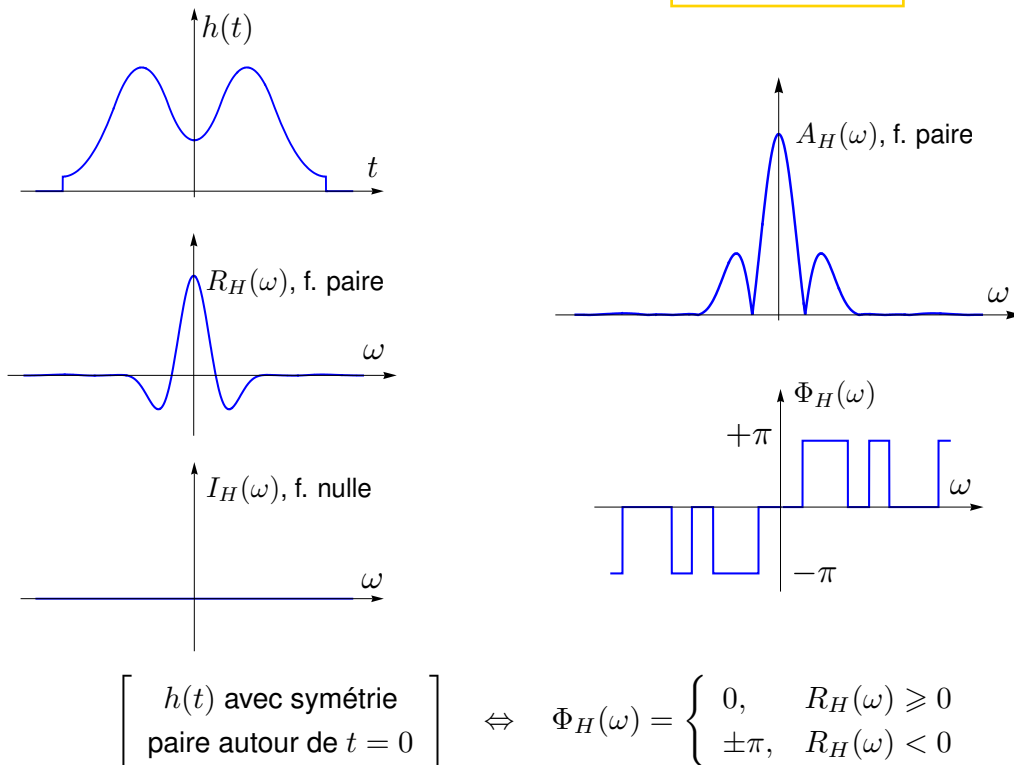
7.2 FILTRES A PHASE LINEAIRE

- Phase linéaire: cas de la symétrie paire
- Phase linéaire: cas de la symétrie impaire
- Réponse impulsionnelle d'un filtre à phase linéaire
- Réponse indicielle d'un filtre à phase linéaire
- Temps de montée
- Filtres passe-bas Gaussien
- Mise en cascade: filtre Gaussien équivalent

Réponse impulsionnelle à symétrie paire

- Symétrie paire autour de $t = 0$

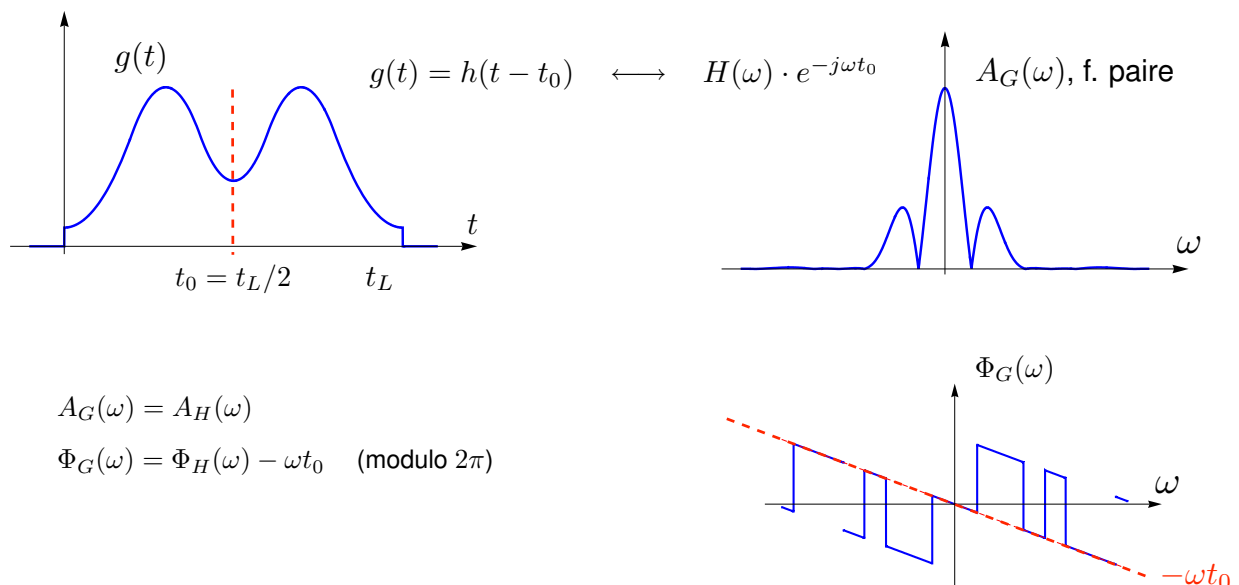
$$h(t) = h(-t)$$



Phase linéaire: cas de la symétrie paire

- Symétrie paire autour de $t = t_0$

$$g(t_0 + \tau) = g(t_0 - \tau) = h(\tau)$$

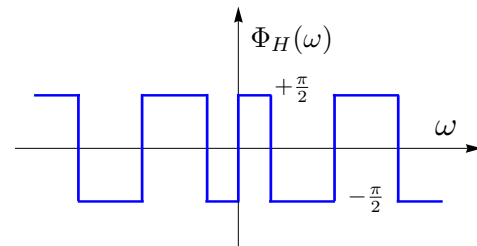
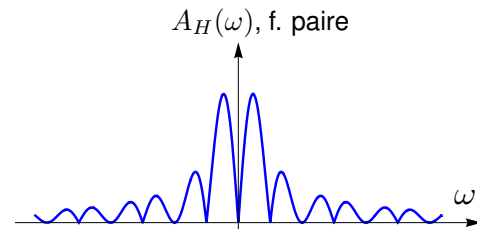
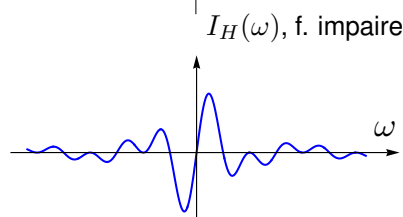
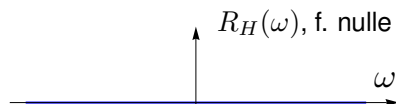
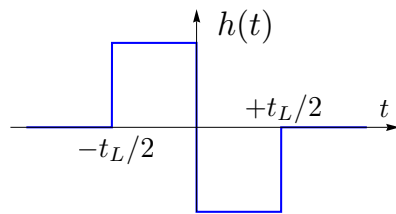


$$\left[\begin{array}{l} g(t) \text{ avec symétrie} \\ \text{paire autour de } t = t_0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \Phi_G(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0, & R_H(\omega) \geq 0 \\ -\omega t_0 \pm \pi, & R_H(\omega) < 0 \end{cases} = \text{phase linéaire!}$$

Réponse impulsionnelle à symétrie impaire

■ Symétrie impaire autour de $t = 0$

$$h(t) = -h(-t)$$

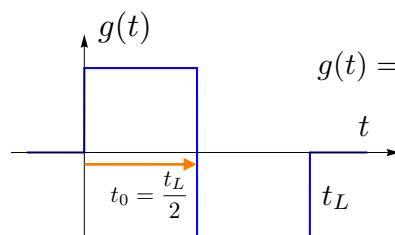


$$\left[\begin{array}{c} h(t) \text{ avec symétrie} \\ \text{impaire autour de } t = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \Phi_H(\omega) = \begin{cases} +\pi/2, & I_H(\omega) > 0 \\ -\pi/2, & I_H(\omega) < 0 \end{cases}$$

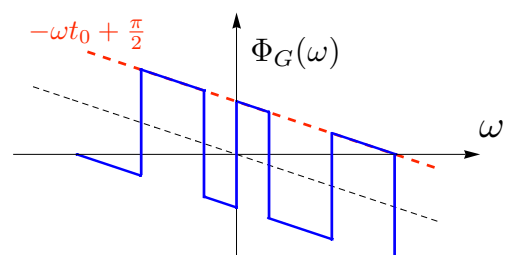
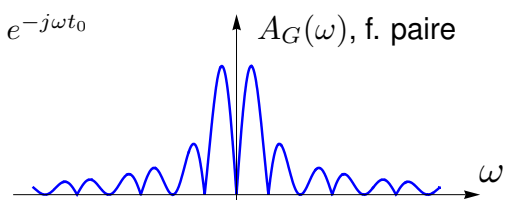
Phase linéaire: cas de la symétrie impaire

■ Symétrie impaire autour de $t = t_0$

$$g(t_0 + \tau) = -g(t_0 - \tau) = h(\tau)$$



$$g(t) = h(t - t_0) \longleftrightarrow H(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$



$$\begin{aligned} A_G(\omega) &= A_H(\omega) \\ \Phi_G(\omega) &= \Phi_H(\omega) - \omega t_0 \quad (\text{modulo } 2\pi) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} g(t) \text{ avec symétrie} \\ \text{impaire autour de } t = t_0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \Phi_G(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0 + \pi/2, & I_H(\omega) > 0 \\ -\omega t_0 - \pi/2, & I_H(\omega) < 0 \end{cases} = \text{phase linéaire!}$$

Réponse impulsionnelle d'un filtre à phase linéaire

Réponse fréquentielle d'un filtre réel, passe-bas à phase linéaire *pure*; i.e.,

$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (\text{c-à-d. } \Phi_H(\omega) = -\omega t_0)$$

Calcul de la réponse impulsionnelle:

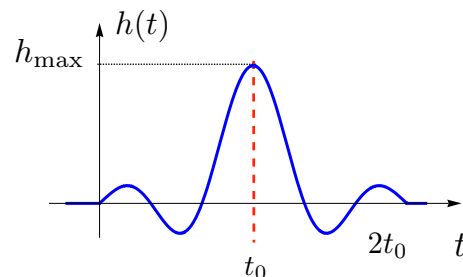
$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| \cdot e^{j(\omega t + \Phi_H(\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| \cdot \cos(\omega(t - t_0)) d\omega \end{aligned}$$

Réponse maximale pour $t = t_0$ (tous les cosinus sont en phase):

$$h(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| d\omega = h_{\max}$$

Symétrie paire autour de $t = t_0$

$$h(t_0 + \tau) = h(t_0 - \tau)$$



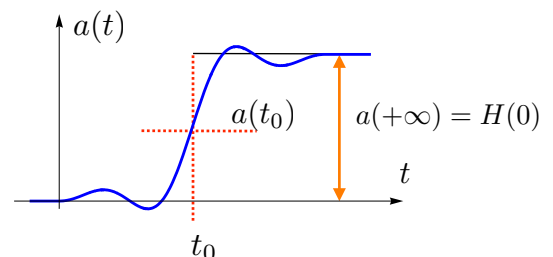
Réponse indicielle d'un filtre passe-bas à phase linéaire

Réponse indicielle (cas général): $a(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$

■ Filtre causal:

$$a(t) = 0, \text{ pour } t \leq 0$$

$$a(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = H(0) > 0 \quad (\text{si filtre passe-bas})$$



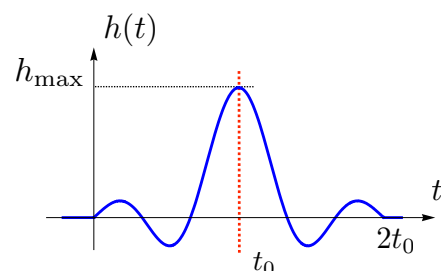
■ Filtre à phase linéaire: $h(t_0 + \tau) = h(t_0 - \tau)$

$$a(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} h(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = \frac{1}{2} H(0)$$

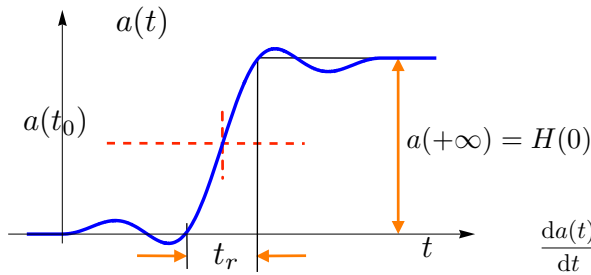
Anti-symétrie autour de $t = t_0$

$$a(t_0 + \tau) - a(t_0) = -(a(t_0 - \tau) - a(t_0))$$

$$\text{Justification: } a(t_0 \pm \tau) = \underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} h(\tau) d\tau}_{a(t_0)} \pm \int_0^{\tau} h(t_0 + \tau) d\tau$$



Temps de montée



$$\left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \right|_{t=t_0} = h(t_0) = h_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| d\omega$$

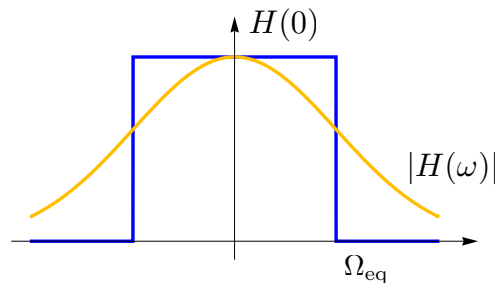
■ Temps de montée: "rise time"

$$\frac{H(0)}{t_r} = \left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = h_{\max} \Rightarrow t_r = \frac{H(0)}{h_{\max}} = \frac{2\pi H(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| d\omega}$$

$$t_r = \frac{\pi}{\Omega_{\text{eq}}} = \frac{1}{2f_{\text{eq}}}$$

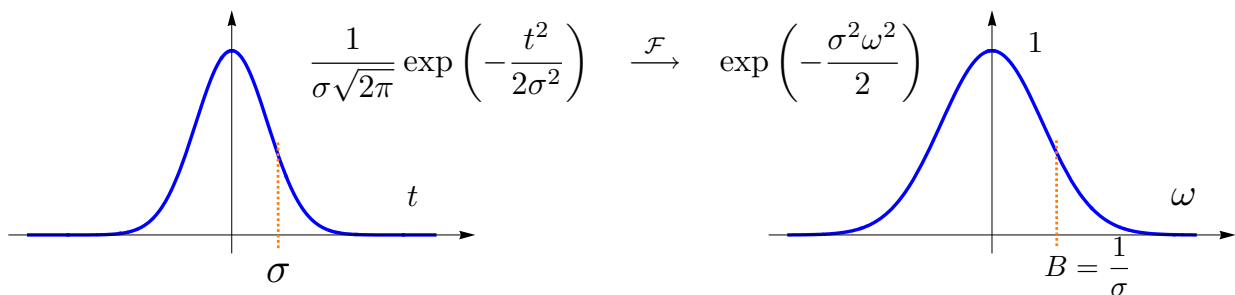
■ Largeur de bande équivalente

$$2\Omega_{\text{eq}} H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| d\omega$$



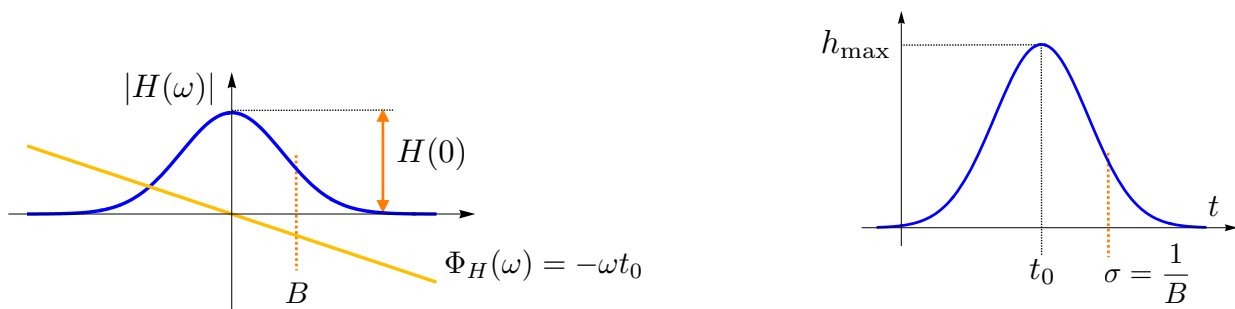
Filtre passe-bas Gaussien

■ Transformation de Fourier d'une Gaussienne normalisée



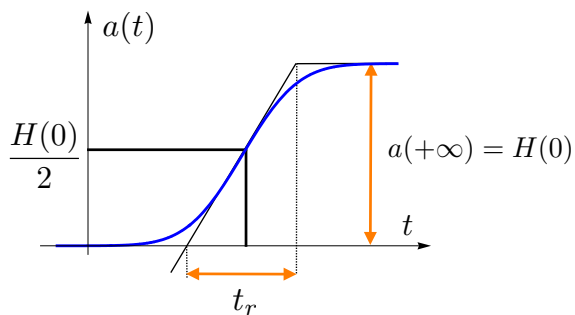
■ Filtre passe-bas Gaussien avec phase linéaire

$$H(\omega) = H(0) \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2}{2B^2}\right) \cdot e^{-j\omega t_0} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = H(0) \cdot \frac{B}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{B^2(t-t_0)^2}{2}\right)$$



Filtre passe-bas Gaussien (suite)

■ Réponse indicielle: fonction Erf



$$t_r = \frac{H(0)}{h_{\max}}$$

$$h_{\max} = H(0) \cdot \frac{B}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{\sqrt{2\pi}}{B} = \sigma\sqrt{2\pi} = \frac{\pi}{\Omega_{\text{eq}}}$$

$$\Rightarrow \Omega_{\text{eq}} = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} B \approx 1.25 \cdot B$$

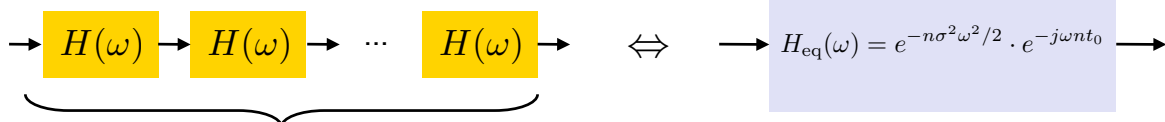
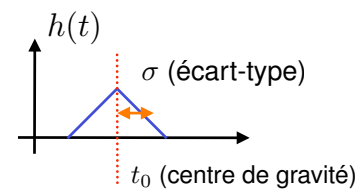
Cascade de filtres: filtre Gaussien équivalent

■ Caractéristiques du filtre

Type passe-bas: $H_{\max} = H(0) = \int_{\mathbb{R}} h(t) dt = 1$

Temps de retard: $t_0 = \int_{\mathbb{R}} t \cdot h(t) dt$

Largeur équivalente: $\sigma = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 h(t) dt}$



Cascade de n filtres identiques

$$B = \frac{1}{\sigma}; \quad \text{retard: } t_0$$

Filtre Gaussien équivalent

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = n\sigma^2; \quad B_{\text{eq}} = \frac{B}{\sqrt{n}}; \quad t_{0,\text{eq}} = nt_0$$

■ Généralisation: cascade de n filtres (Gaussien)

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2; \quad t_{0,\text{eq}} = t_{0,1} + \dots + t_{0,n}$$

Théorème central-limite

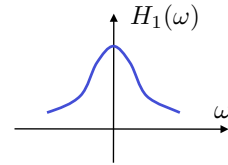
■ Théorème central-limite

Hypothèses

- $H_1(0) = 1$ (spectre passe-bas)

- Maximum global à $\omega = 0$ avec

$$\left. \frac{dH_1(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2 H_1(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = -\sigma^2 < 0$$



$$H_n(\omega) = (H_1(\omega))^n \rightarrow e^{-n\sigma^2\omega^2/2}, \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

■ Preuve

Série de Taylor autour de l'origine:

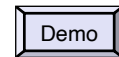
$$H_1(\omega) = 1 - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2!} + O(\omega^4)$$

$$\xi = \omega\sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_1(\xi/\sqrt{n}))^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{-\sigma^2 \xi^2/2}{n}}_{z/n} + \underbrace{\frac{O(\xi^4)}{n^2}}_{\rightarrow 0} \right)^n = e^{-\sigma^2 \xi^2/2}$$

Rappel:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$$



7.3 FONCTIONS DE TRANSFERT RATIONNELLES

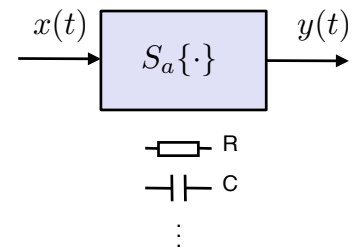
- Fonctions de transfert rationnelles
- Pôles et zéros
- Décomposition en fractions simples
- Détermination de la réponse impulsionnelle
- Exemple de calcul

Fonctions de transfert rationnelles

■ Filtre analogique à constantes localisées (équation différentielle)

Contraintes physiques: $n \geq m$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$



■ Equation du filtre dans le domaine de Fourier

$$(j\omega)^n Y(\omega) + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} Y(\omega) + \dots + a_0 Y(\omega) = b_m (j\omega)^m X(\omega) + \dots + b_0 X(\omega)$$

$$((j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0) Y(\omega) = (b_m (j\omega)^m + \dots + b_0) X(\omega)$$

■ Fonction de transfert

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)}$$

$$P_m(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$$

$$Q_n(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = \text{polynôme caractéristique (cf. Chap 2)!}$$

Pôles et zéros

■ Fonctions de transfert rationnelles

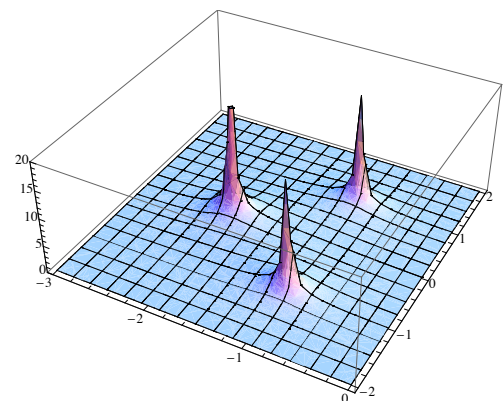
$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=j\omega}$$

■ Factorisation

$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})}$$

Zéros: $\{s_{0k}\}_{k=1, \dots, m}$ t.q. $P_m(s_{0k}) = 0$

Pôles: $\{s_{pk}\}_{k=1, \dots, n}$ t.q. $Q_n(s_{pk}) = 0$



■ Pourquoi l'appellation «pôles»?

Une explication parmi d'autres:

Le quotient $P_m(s)/Q_n(s)$ est une fonction dans le plan complexe qui ressemble vaguement à une tente avec des singularités (piquets=«poles» en anglais) en $s = s_{pk}$.

Décomposition en fractions simples

$$H(\omega) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=j\omega} = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})} \quad m \leq n$$

■ Cas de racines simples

$$H(\omega) = \underbrace{b_n}_{=0, \text{ si } n > m} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - s_{pk}} \quad \text{avec} \quad A_i = (s - s_{pi}) \cdot \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=s_{pi}} = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (s_{pi} - s_{0k})}{\prod_{k \neq i} (s_{pi} - s_{pk})}$$

■ Cas de racines multiples

Contribution d'un pôle multiple d'ordre p :

$$\frac{B_1}{j\omega - s_p} + \frac{B_2}{(j\omega - s_p)^2} + \dots + \frac{B_p}{(j\omega - s_p)^p} \quad \text{avec} \quad B_{p-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left((s - s_p)^p \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \right)_{s=s_p}$$

Détermination de la réponse impulsionnelle

■ Cas de racines simples

$$H(\omega) = \underbrace{b_n}_{=0, \text{ si } n > m} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - s_{pk}}$$

$\downarrow \mathcal{F}^{-1}$

$$h(t) = \underbrace{b_n \delta(t)}_{=0, \text{ si } n > m} + \sum_{k=1}^n A_k u(t) \cdot e^{s_{pk} t}$$

$\Rightarrow$ Somme pondérée de modes (cf. Chap. 2)!

$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
$\delta(t)$	1
$u(t) \cdot e^{st}$	$\frac{1}{j\omega - s}, \quad \text{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t_+^n e^{st}}{n!}$	$\frac{1}{(j\omega - s)^{n+1}}, \quad \text{Re}\{s\} < 0$
$u(t) \cdot e^{at} \cos \omega_0 t$	$\frac{j\omega - a}{(j\omega - a)^2 + \omega_0^2}, \quad a < 0$
$u(t) \cdot e^{at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(j\omega - a)^2 + \omega_0^2}, \quad a < 0$

■ Contribution d'un pôle multiple (ordre p)

$$\frac{B_1}{j\omega - s_p} + \frac{B_2}{(j\omega - s_p)^2} + \dots + \frac{B_p}{(j\omega - s_p)^p} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \left(\sum_{k=1}^p B_k \frac{t_+^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{s_p t}$$

Condition de stabilité BIBO

Tous les pôles dans le demi-plan complexe gauche !

Exemple de calcul

Problème: Calculer la réponse impulsionnelle du filtre: $H(\omega) = \frac{-2\omega^2 + 5}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}$

1. Exprimer $H(\omega)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en $s = j\omega$

$$H(\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 5}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2} \Big|_{s=j\omega}$$

2. Détermination des pôles: $s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow (s_1 = -1, s_2 = -2)$

Le système causal est stable!

3. Décomposition en fractions simples

$$\frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s^2 + 5}{(s+1)(s+2)} = 2 + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} \quad (\text{remarque: } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = b_m = 2)$$

$$A_1 = \frac{2s^2 + 5}{(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7; \quad A_2 = \frac{2s^2 + 5}{(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$

4. Réponse impulsionnelle par transformation de Fourier inverse

$$h(t) = 2\delta(t) + 7u(t) \cdot e^{-t} - 13u(t) \cdot e^{-2t}$$

7.4 PLACEMENT DES POLES ET ZEROS

- Réponse d'amplitude et de phase
- Contribution d'un pôle réel
- Contribution d'un zéro réel
- Contribution d'une paire de pôles conjugués
- Contribution d'une paire de zéros conjugués
- Système à phase minimale
- Filtre passe-tout

Fonction de transfert: pôles et zéros

■ Fonctions de transfert rationnelles

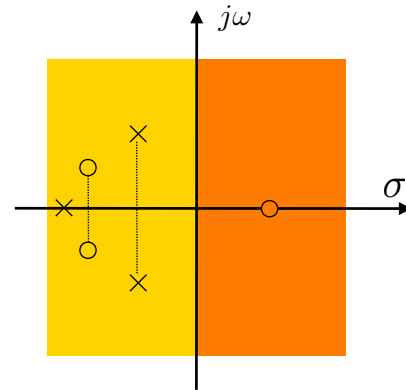
$$H(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=j\omega} \quad m \leq n$$

Exemples: circuit électrique à constantes localisées

$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})}$$

$s_{0k} = \sigma_{0k} + j\omega_{0k}$: zéros de $H(\omega)$ ○

$s_{pk} = \sigma_{pk} + j\omega_{pk}$: pôles de $H(\omega)$ ×



Réponse d'amplitude et de phase

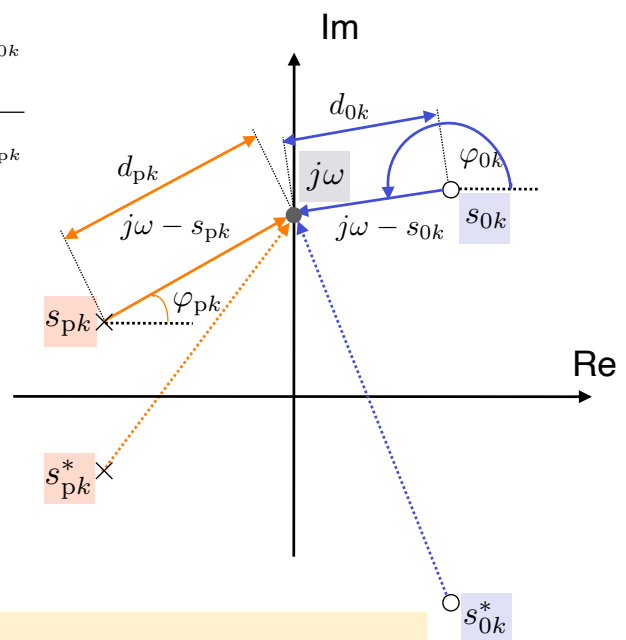
$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})} = b_m \frac{\prod_{k=1}^m d_{0k} \cdot e^{j\varphi_{0k}}}{\prod_{k=1}^n d_{pk} \cdot e^{j\varphi_{pk}}}$$

Représentation polaire:

$$j\omega - (\sigma_k + j\omega_k) = d_k \cdot e^{j\varphi_k}$$

$$d_k = \sqrt{\sigma_k^2 + (\omega - \omega_k)^2}$$

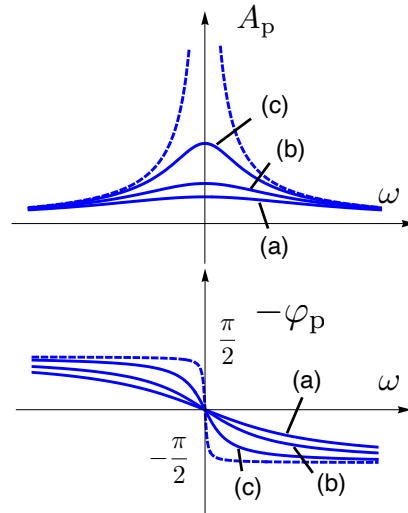
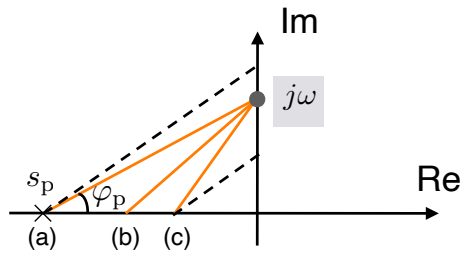
$$\varphi_k = \arctan \frac{\omega - \omega_k}{-\sigma_k}$$



$$\text{Amplitude: } A_H(\omega) = |b_m| \cdot \frac{\prod_{k=1}^m d_{0k}}{\prod_{k=1}^n d_{pk}} \quad \text{Phase: } \Phi_H(\omega) = \sum_{k=1}^m \varphi_{0k} - \sum_{k=1}^n \varphi_{pk}$$

Contribution d'un pôle réel

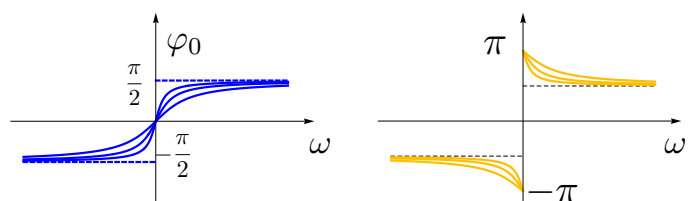
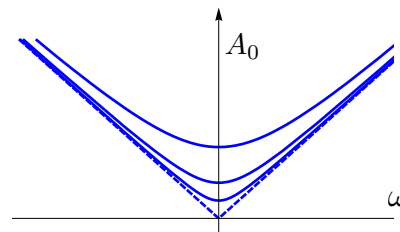
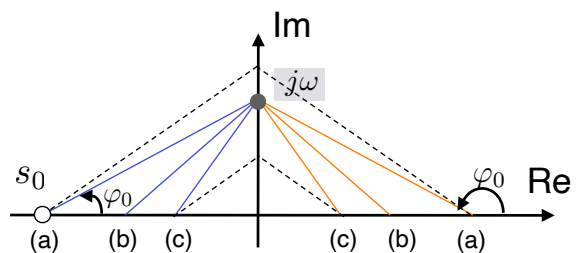
$$s_p = \sigma_p < 0$$



Click for demo

Contribution d'un zéro réel

$$s_0 = \sigma_0$$



$$\sigma_0 < 0$$

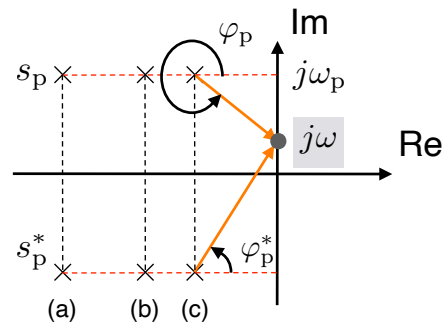
$$\sigma_0 > 0$$

Click for demo

Contribution d'une paire de pôles conjugués

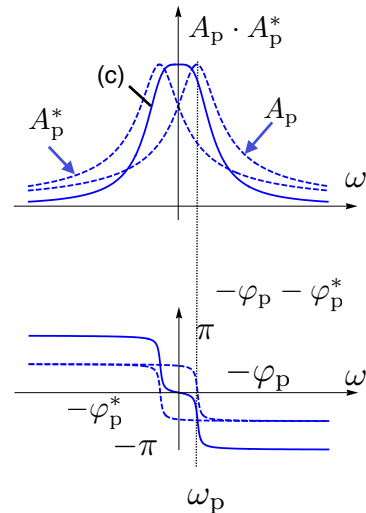
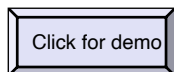
$$s_p = \sigma_p + j\omega_p$$

$$s_p^* = \sigma_p - j\omega_p$$



Placement du/des pôle(s): effets qualitatifs

- Résonance (amplification) à la fréquence ω_p ; d'autant plus forte que le pôle est proche de l'axe imaginaire
- Retard de phase de l'ordre de $\pi/2$ par pôle



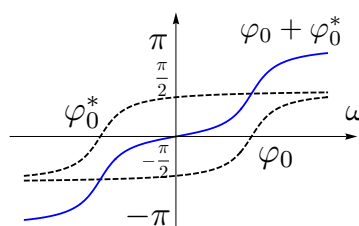
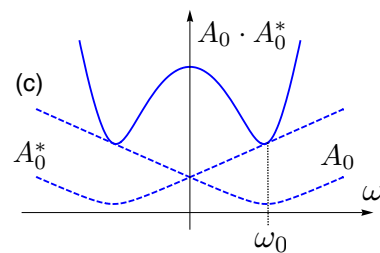
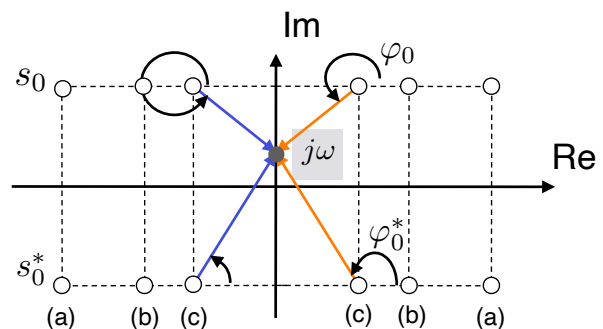
Contribution d'une paire de zéros conjugués

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$$

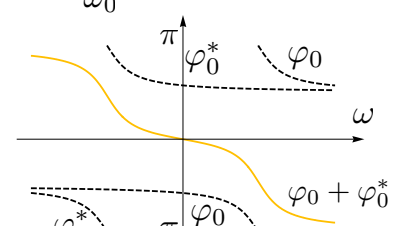
$$s_0^* = \sigma_0 - j\omega_0$$

Placement du/des zéro(s): effets qualitatifs

- Atténuation à la fréquence ω_0 ; d'autant plus forte que le zéro est proche de l'axe imaginaire
- Avance ($\sigma_0 < 0$) ou retard ($\sigma_0 > 0$) de phase de l'ordre de $\pi/2$ par zéro



$$\sigma_0 < 0$$



$$\sigma_0 > 0$$



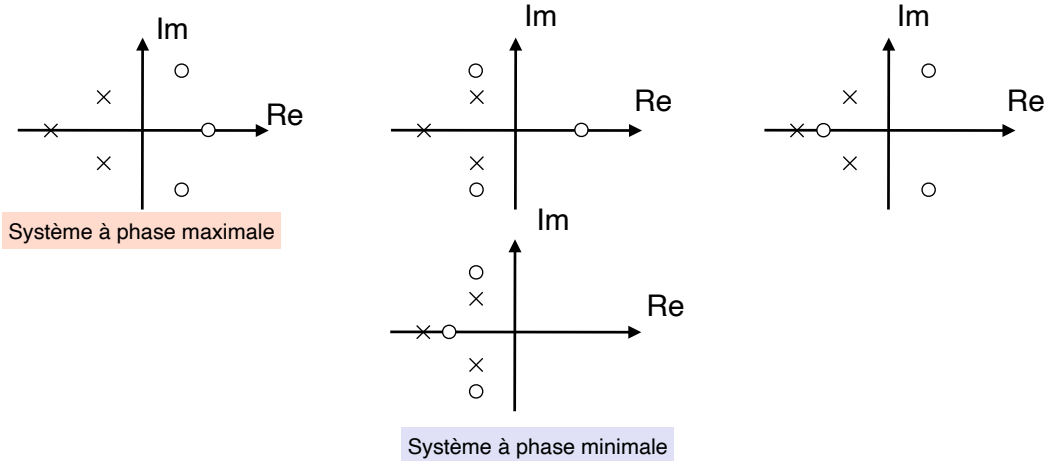
Système à phase minimale

On peut obtenir la même réponse en amplitude avec deux zéros dont les σ_{0k} sont de valeur opposée

- Si $\sigma_{0k} > 0$, la contribution en phase pour $\omega > 0$ est négative
- Si $\sigma_{0k} < 0$, la contribution en phase est positive; elle peut donc compenser en partie la composante en phase des pôles qui est toujours négative!

Filtre à phase minimale: tous les zéros dans le demi-plan gauche.

Parmi tous les filtres rationnels causaux ayant la même réponse d'amplitude, c'est celui qui a la phase minimale.



Filtre passe-tout

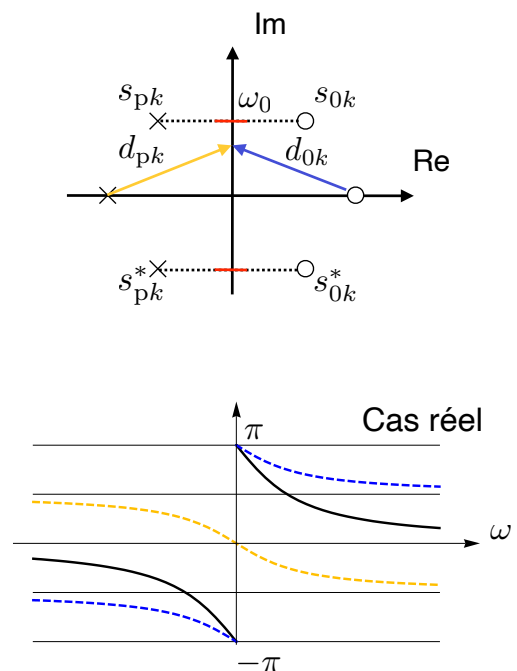
Filtre passe-tout = déphaseur

- Modifie seulement la phase
- Pôles et zéros placés de façon symétrique

$$A_H(\omega) = 1 \quad \forall \omega \Rightarrow A_H(\omega) = \prod_{k=1}^n \underbrace{\frac{d_{0k}}{d_{pk}}}_1$$

$$\sigma_{0k} + j\omega_{0k} = -\sigma_{pk} + j\omega_{pk} \Leftrightarrow s_{0k} = -s_{pk}^*$$

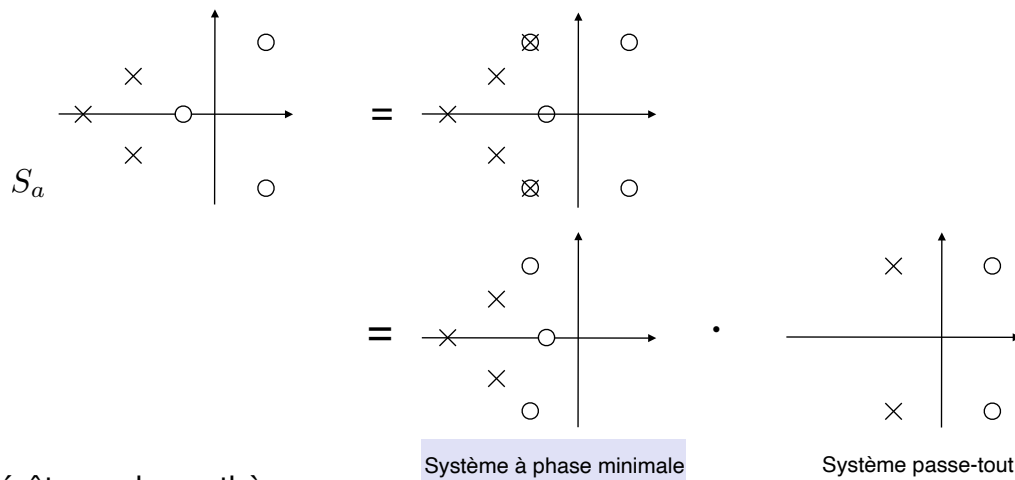
Exemple: $H(\omega) = \frac{j\omega - d}{j\omega + d}$



Décomposition: phase minimale-passe-tout

■ Propriété

Toute fonction de transfert rationnelle peut se décomposer en une cascade d'un système à phase minimale et un système passe-tout



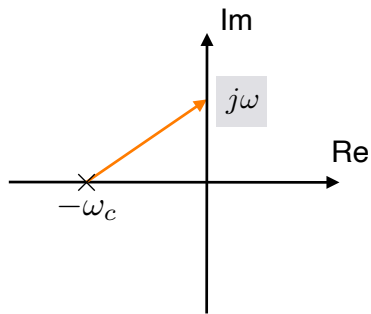
■ Intérêt pour la synthèse

- On tient compte d'abord de l'amplitude uniquement et l'on choisit la solution à phase minimale (pôles et zéros dans le demi-plan gauche)
- On corrige ensuite la phase à l'aide d'un filtre passe-tout

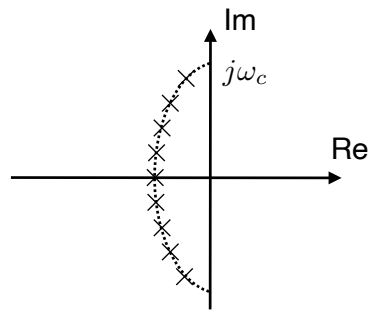
7.5 SYNTHÈSE DE FILTRES PARTICULIERS

- Filtres passe-bas
- Filtres passe-bande
- Filtres à encoches
- Filtres de Butterworth

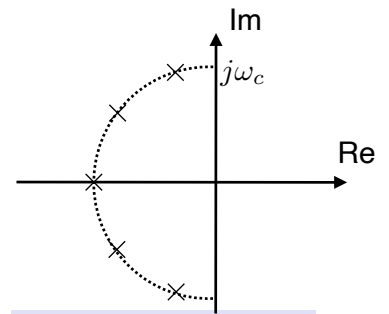
Filtres passe-bas



(a) Filtre du premier ordre ($n = 1$)

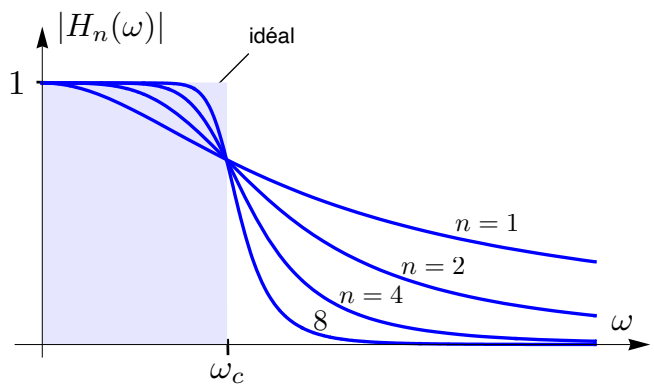


(b) Mur de pôles

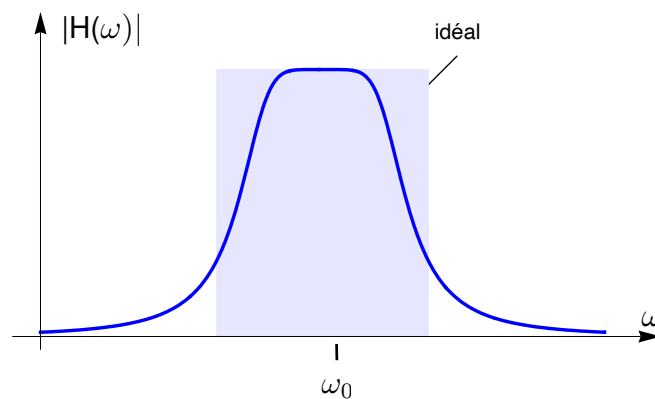
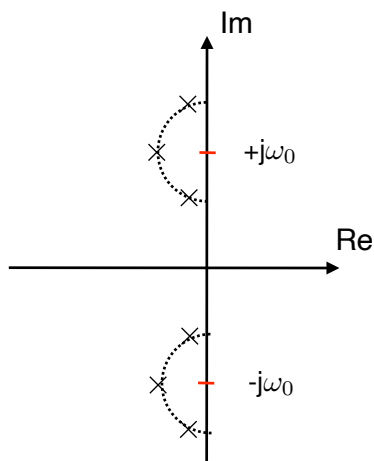


(c) Filtre de Butterworth

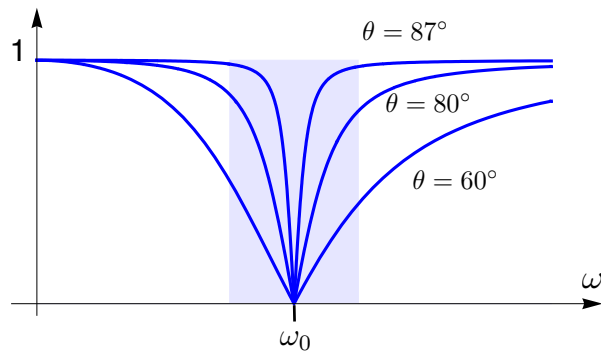
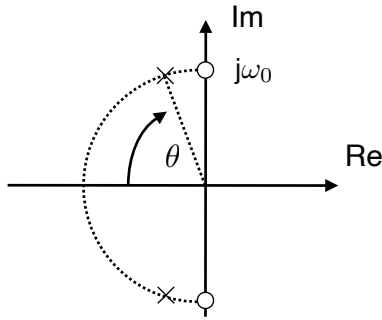
$$H_1(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$



Filtres passe-bande



Filtre à encoche (Notch filter)



■ Contraintes

- $H(\omega_0) = 0 \Rightarrow$ zéros à $s = \pm j\omega_0$
- $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = 1 \Rightarrow$ même nombre de pôles et de zéros ($n = m$)
- $H(0) = 1 \Leftarrow$ pôles et zéros équidistants de l'origine (arc de cercle)

■ Exemple: filtre du 2^{ème} ordre

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega + j\omega_0)(j\omega - j\omega_0)}{(j\omega + \omega_0(\cos \theta + j \sin \theta))(j\omega + \omega_0(\cos \theta - j \sin \theta))}$$

Unser / Signaux et systèmes

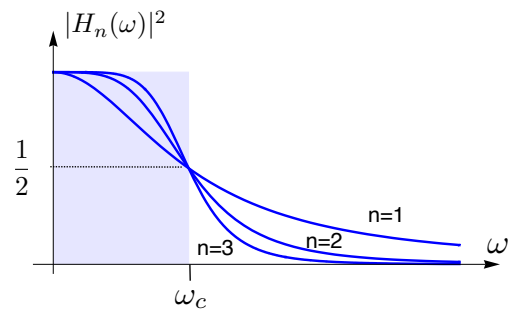
7-41

Filtres de Butterworth

■ Definition: filtre de Butterworth d'ordre n

$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}$$

ω_c : fréquence de coupure



■ Propriétés de filtrage passe-bas

- Comportement à l'origine: «Maximally Flat Magnitude Filter»

$$|H_n(\omega)|^2 = 1 + O(\omega^{2n})$$

En effect: $\frac{1}{1 + \Delta x} = 1 - \underbrace{\Delta x}_{O(\omega^{2n})} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{O(\omega^{4n})} - \dots$

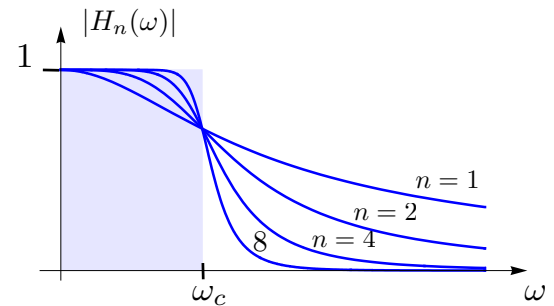
- Comportement asymptotique:

$$|H_n(\omega)| \propto \frac{1}{|\omega|^n} \text{ lorsque } \omega \rightarrow +\infty$$

Filtres de Butterworth (suite)

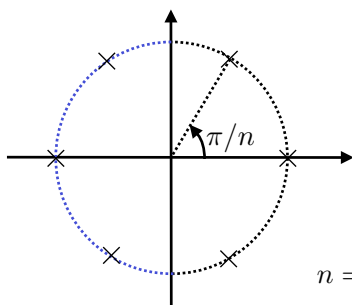
$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} = \frac{1}{1 + (s/(j\omega_c))^{2n}} \Big|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{\omega_c^n}{Q_n(j\omega)} \cdot \frac{\omega_c^n}{Q_n(-j\omega)} = H_n(\omega) \cdot H_n^*(\omega)$$

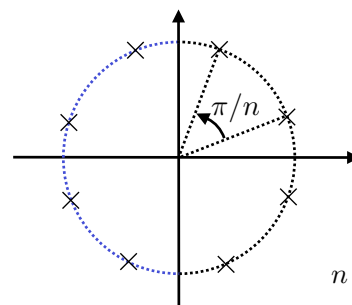


- Pôles de $|H_n(\omega)|^2 = H_n(\omega) \cdot H_n(-\omega)$

$$\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2n} = -1 \cdot j^{2n} = e^{j\pi(2k-1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}2n} \Rightarrow s_{pk} = \omega_c \cdot e^{j\frac{\pi}{2n}(2k-1+n)}$$



$n = 3$ (impair)



$n = 4$ (pair)

Autres filtres

- Filtres de Chebyshev
- Filtres elliptiques
- ...
- Transformations fréquentielles

Exemple: filtre passe-bas $\rightarrow$ filtre passe-haut

$$\omega \rightarrow \frac{\omega_c}{\omega}$$